Задание **18** из ЕГЭ

Знание основных понятий
и законов математической логики

(повышенный уровень сложности)

Пример задания

Элементами множества А являются натуральные числа.
Известно, что выражение

$$(x \in \{2,4,6,8,10,12\}) \to (((x \in \{4,8,12,116\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2,4,6,8,10,12\}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной х.
Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

Решение

(x∈{2,4,6,8,10,12})→(((x∈{4,8,12,116})∧¬(x∈A))→¬(x∈{2,4,6,8,10,12}))

Заметим, что в задаче, кроме множества *A*, используются еще два множества:

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12} и Q = {4, 8, 12, 116}

Обозначим отдельные высказывания буквами

A: $x \in A$,   **P**: $x \in P$,   **Q**: $x \in Q$

Получаем $$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

Решение

(x∈{2,4,6,8,10,12})→(((x∈{4,8,12,116})∧¬(x∈A))→¬(x∈{2,4,6,8,10,12}))

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

раскрываем обе импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$

$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$

используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$$\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}}$$

Решение

(x∈{2,4,6,8,10,12})→(((x∈{4,8,12,116})∧¬(x∈A))→¬(x∈{2,4,6,8,10,12}))

$$\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}}$$

Поскольку это выражение должно быть истинно,

то $\boldsymbol{A}$ должно быть истинным везде, где ложно $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$

тогда минимальное допустимое множество *A* – это

$$A_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

Решение

$(x \in \{2,4,6,8,10,12\}) \to (((x \in \{4,8,12,116\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2,4,6,8,10,12\}))$

$$A_{\min} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

Переходим ко множествам

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

Q = {   4,   8,   12, 116}

$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ – это все натуральные числа, которые входят одновременно в P и Q, то есть $A_{\min}$ = {4, 8, 12}, сумма этих чисел равна **24**.

Еще один пример задания

Элементами множеств А, P и Q являются натуральные числа, причём

P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и

Q = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 }.

Известно, что выражение

$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$

истинно при любом значении переменной x.

Определите наибольшее возможное количество элементов множества А.

Решение

$((x \in A) \to \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \to \neg(x \in A)) = 1$

$$(A \to \overline{P}) \cdot (\overline{Q} \to \overline{A}) = 1$$

$$(A \to \overline{P}) \cdot (\overline{Q} \to \overline{A}) =$$ { Определение импликации }

$$= (\overline{A} + \overline{P}) \cdot (Q + \overline{A}) =$$ { Распределительный закон }

$$= \overline{A} + \overline{P} \cdot Q$$

Решение

$$((x \in A) \to \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \to \neg(x \in A)) = 1$$

$$\overline{A} + \overline{P} \cdot Q = 1$$

Поскольку это выражение должно быть истинно,

то A должно быть истинным везде, где истинно $\overline{P} \cdot Q$,

тогда максимальное допустимое множество *A* – это

$$A_{\max} = \overline{P} \cdot Q$$

Решение

$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A)) = 1$

$$A_{\max} = \overline{P} \cdot Q$$

Переходим ко множествам

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

Q = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

$\overline{P} \cdot Q$ – это все числа, которые **входят в Q,**
но НЕ входят в P,

то есть $\boldsymbol{A_{\max}}$ **= {3, 9, 15, 21, 24, 27, 30}**,
количество этих чисел равно **7**.

Еще один пример задания

На числовой прямой даны два отрезка:
P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

$$P \to (Q \cdot \overline{A} \to \overline{P}) = 1$$

$$P \to (Q \cdot \overline{A} \to \overline{P}) =$$ { Определение импликации }

$$= \overline{P} + (\neg(Q \cdot \overline{A}) + \overline{P}) =$$ { Правило де Моргана }

$$= \overline{P} + \overline{Q} + A + \overline{P} =$$ { Правило отсутствия коэффициентов }

$$= \overline{P} + \overline{Q} + A$$

Решение

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

$$\overline{P} + \overline{Q} + A = 1$$

Поскольку это выражение должно быть истинно,

то $\boldsymbol{A}$ должно быть истинным везде, где ложно $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$,

тогда минимальный отрезок *A* – это

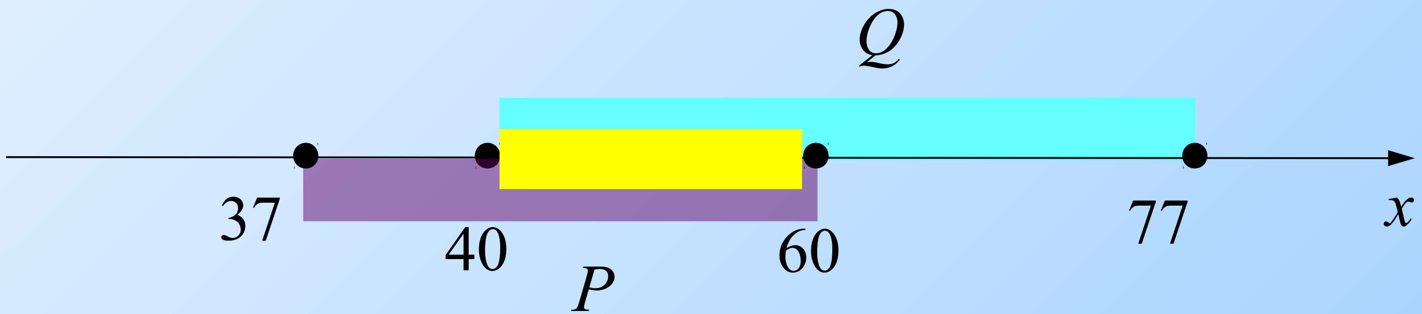
$$A_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

Решение

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

$$A_{\min} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

Вернемся к отрезкам: P = [37; 60] и Q = [40; 77].



$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ - это пересечение отрезков.

То есть A_{min} = [40; 60] , его длина равна **20**.