

C3

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 27. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 27 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 26$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S , и укажите выигрышающий ход для каждого указанного значения S .
 б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.
2. Укажите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём (а) Петя не может выиграть за один ход и (б) Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.
3. Укажите значение S , при котором:
 - у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и
 - у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.
 Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в куче.

Полный анализ игры (техника):

1. Каждую позицию обозначим буквами В или П, где В — игрок, попавший в эту позицию, ходит первым и выигрывает, П — игрок ходит первым и проигрывает.
2. Если позиция конечная, то она обозначается буквой П.
3. Если из позиции есть ход в позицию, помеченную буквой П, то она помечается буквой В.
4. Если из позиции все ходы ведут в позиции, помеченные буквами В, то она помечается буквой П.

Решение:

Запишем в таблицу все возможные позиции игры.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	≥ 27	

Отметим конечную позицию (≥ 27) буквой П:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	≥ 27	
																											П

Отметим все позиции, из которых можно в нее попасть, буквами В.

Так как ходы +1, +2, *2, то это будут все позиции от 14 и выше:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	≥27	
													В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	П

Рассмотрим позицию 13. Из нее можно попасть в позиции:

$$13 + 1 = 14 \text{ (это В)}$$

$$13 + 2 = 15 \text{ (это В)}$$

$$13 * 2 = 26 \text{ (это В)}$$

Так как из этой позиции можно попасть только в В, отмечаем ее буквой П:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	≥27	
												П	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	П

Отметим все позиции, из которых можно в нее попасть, буквами В.

Так как ходы +1, +2, *2, то это будут позиции:

$$13 - 1 = 12$$

$$13 - 2 = 11$$

$13 : 2$ – не существует в целых числах.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	≥27	
										В	В	П	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	П

Рассмотрим позицию 10. Из нее можно попасть в позиции:

$$10 + 1 = 11 \text{ (это В)}$$

$$10 + 2 = 12 \text{ (это В)}$$

$$10 * 2 = 20 \text{ (это В)}$$

Так как из этой позиции можно попасть только в В, отмечаем ее буквой П:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	≥27	
									П	В	В	П	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	П

Можно продолжить и дальше, но ответы на вопросы задачи уже получены.

Итак:

Вопрос 1а. Петя может выиграть за один ход при любом $S \geq 14$. Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 27 камней

Вопрос 1б. При $S = 13$ Петя не может выиграть в один ход, потому что при его ходе «+1» число камней в куче становится равно 14 (меньше 27), при его ходе «+2» число камней в куче становится равно 15 (меньше 27), а при ходе «*2» число камней в куче становится равно 26 (также меньше 27). Других возможных ходов у Пети нет. Из любой позиции после одного хода Пети (это может быть 14, 15 или 26), Ваня может выиграть своим первым ходом, удвоив количество камней в куче

Вопрос 2. Из позиций $S = 11$ и $S = 12$ Петя не может выиграть в один ход, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. При $S = 11$ ходом «+2» Пете нужно перевести игру в позицию $S = 13$, которая является проигрышной (см. ответ на вопрос 1б). При $S = 12$ Петя переводит игру в ту же позицию ходом «+1»

Вопрос 3. В позиции $S = 10$ у Вани есть выигрышная стратегия, которая позволяет ему выиграть первым или вторым ходом. Если Петя выбирает ход «+1», в куче становится 11 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «+2», в куче становится 12 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «*2», в куче становится 20 камней и Ваня выигрывает первым ходом, удвоив число камней в куче

Остается нарисовать дерево (в виде таблицы) возможных вариантов игры из позиции $S = 10$.

Начальная позиция	1-й ход Пети (все варианты)	1-й ход Вани (ход по стратегии)	2-й ход Пети (все варианты)	2-й ход Вани (ход по стратегии)
10	+ 1 = 11	+ 2 = 13	+ 1 = 14	* 2 = 28 (выигрыш)
			+ 2 = 15	* 2 = 30 (выигрыш)
			* 2 = 26	* 2 = 52 (выигрыш)
	+ 2 = 12	+ 1 = 13	см. выше	
	* 2 = 20	* 2 = 40 (выигрыш)		